INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS

COMUNICACIONES I

PRACTICA No 3 “TRANSFORMADA DE FOURIER”

By Richard

FECHA DE REALIZACIÓN: 26-FEB-08

FECHA DE ENTREGA: 12-MAR-08

FUNDAMENTO TEÓRICO.

La transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función continua e integrable de una variable real x se define por:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iux} dx$$

Observemos que la transformada de una función real es una función compleja. Es decir, F(u)=R(u)+I(u)i, donde R(u) e I(u) son la parte real e imaginaria de F(u), respectivamente. La variable u recibe el nombre de variable de frecuencia.

El módulo de F(u), |F(u)|= (R(u)2+ I(u)2)1/2 recibe el nombre del espectro de Fourier. El cuadrado del espectro se denomina espectro de potencias o densidad espectral de f(x).
Su ángulo P(u)=arctg(I(u)/R(u)) recibe el nombre de fase.

En matemática, la transformada de Fourier es una aplicación que hace corresponder a una función f con valores reales o complejos y definida en la recta, otra función g definida de la manera siguiente:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

El factor, que acompaña la integral en definición facilita el enunciado de algunos de los teoremas referentes a la transformada de Fourier. Aunque esta forma de normalizar la transformada de Fourier es la más comúnmente adoptada, no es universal.

La transformada de Fourier así definida goza de una serie de propiedades de continuidad que garantizan que puede extenderse a espacios de funciones mayores e incluso a espacios de funciones generalizadas.

La transformada de Fourier, tiene una multitud de aplicaciones en muchas áreas de la ciencia e ingeniería: la física, la teoría de los números, la combinatoria, el procesamiento de señales, la teoría de la probabilidad, la estadística, la óptica, la propagación de ondas y otras áreas. En procesamiento de señales la transformada de Fourier suele considerarse como la descomposición de una señal en componentes de frecuencias diferentes, es decir, g corresponde al espectro de frecuencias de la señal f.

La rama de la matemática que estudia la transformada de Fourier y sus generalizaciones es denominada análisis armónico.

Definición de la transformada de fourier:

Sea f una función Lebesgue integrable:
$f \in L^1(\mathbb{R})$o $f \in L^1(\mathbb{C})$
La transformada de Fourier de f es la función

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Esta integral tiene sentido, pues el integrando es una función integrable. Una estimativa simple demuestra que la transformada de Fourier F(f) es una función acotada. Además por medio del teorema de convergencia dominada puede demostrarse que F(f) es continua.

La transformada de Fourier inversa de una función integrable f está definida por:

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$$

Nótese que la única diferencia entre la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa es el signo negativo en el exponente del integrando. El teorema de inversión de Fourier formulado abajo justifica el nombre de transformada de Fourier inversa dado a esta transformada.

Convolucion

En lo que sigue, definimos la convolución de dos funciones f, g en la recta se define da la manera siguiente:

$$[f \star g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

Nuevamente la presencia del factor delante de la integral simplifica el enunciado de los resultados como el que sigue: Si f y g son funciones absolutamente integrables, la convolución también es integrable, y vale la igualdad:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

También puede enunciarse un teorema análogo para la convolución en la variable transformada,

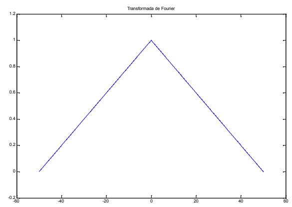
$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g].$$

pero este exige cierto cuidado con el dominio de definición de la transformada de Fourier.

DESARROLLO

Procedimiento:

1.- Usando la función fft() graficar el espectro de la señal x(t)



1.1 Calcular la transformada de x(t) y comparar el resultado de 1

2.- Usando la función Conv( ) graficar la convolucion de $x(t) = 2\{u(t-1) - u(t-3)\}$;
$h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$

3.- Para las funciones siguientes:

$$F_1(\omega) = \frac{j2A}{T\omega}\{1 - Cos(\omega T)\}$$

$$F_2(\omega) = j\omega TA\left\{\frac{Sen^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\right\}$$

Graficar

a) $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$

b) $|F_1(\omega)|$ y $|F_2(\omega)|$

c) La fase de $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$

Análisis

Para el punto No 1 debemos formar primero el vector que representa la función triangular que se nos da para luego aplicar la función fft() por lo que primero obtenemos la función de la grafica y mediante dos ciclos for se rellena el vector con el valor que se requiere, ya formada la función y después aplicamos la función fft() para ello nos conviene saber lo que hace y esto es:

>> X = fft(x)

Hace la FFT del vector x. “X” es un vector de números complejos ordenados desde k=0...N-1. Se recomienda que la longitud del vector x sea una potencia de 2. Lo que no se recomienda es que la longitud de x sea un número primo.

Otra opción del la FFT es especificar el número de puntos con el que se quiere hacer la FFT.

>> X = fft(x,N)

Si la longitud de x es menor que N, el vector se rellena con ceros. Si es mayor, el vector es truncado.

Para el punto No 1.1 tenemos el calculo de la transformada de fourier de la funcion como sigue:

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|1|}{50} & t|\leq| \quad 50 \\ \quad\quad 0 & t > \quad |\end{cases}$$

Aplicamos la formula para obtener la transformada de Fourier:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Dado que sabemos que la función exponencial se puede transformar a la forma rectangular y que la transformada solo tendrá parte real por ser una función par tenemos:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cdot Cos(\omega t)F(\cancel{-j\cdot f(t)\cdot Sen(\omega t)})dt$$

$$F(\omega)=2\int_{0}^{T}\left(1-\frac{t}{50}\right)\cdot Cos(\omega t)dt$$

Haciendo integración por partes:

$$u=1-\frac{t}{50} \qquad dv=Cos\ \omega t\ dt$$

$$du=\frac{-1}{T}dt \qquad v=\frac{Sen(\omega t)}{\omega}$$

$$2\cdot\left(1-\frac{t}{50}\right)\cdot\frac{Sen(\omega t)}{\omega}\Bigg|_0^T+2\cdot\int_0^T\frac{Sen(\omega t)}{\omega t}dt=$$

$$2\cdot\left(1-\frac{t}{50}\right)\cdot\frac{Sen(\omega t)}{\omega}\Bigg|_0^T+2\cdot\frac{Cos(\omega t)}{\omega^2 T}\Bigg|_0^T=$$

$$\cancel{2\cdot\left(1-\frac{50}{50}\right)\cdot\frac{Sen(\omega t)}{\omega}}+2\cdot\frac{Cos(\omega t)}{\omega^2 T}\Bigg|_0^T=\frac{-2}{\omega^2 T}\left(Cos(\omega T)-1\right)=$$

$$\frac{2\cdot(1-Cos(\omega T))}{\omega^2 T}$$

Aplicando la identidad:

$$Sen^2(x)=\frac{1-Cos(2x)}{2}$$

$$\frac{2\cdot\left\{2\cdot Sen^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}}{\omega^2 T}=\frac{Sen^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega^2 T}{4}}=\frac{T\cdot Sen^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

Para el punto No 2 solo tenemos que formar dos vectores que contengan las funciones que se nos piden convolucionar para ello formamos dos vectores del mismo tamaño los cuales tienen intervalos igualmente espaciados, luego calculamos por medio del tamaño que abarcan en el eje x cuantas casillas son las que debemos poner a el valor de 1 o 2 o -1(según el factor por el que este multiplicado el escalón unitario) eso lo realizamos mediante un ciclo for, después aplicamos la función conv() y vemos que nos devuelve y tratamos de ubicarlo en un intervalo mas pequeño en la escala ya que matlab nos regresara el valor de la convolucion en casillas con números enteros.

Para el punto No 3 solamente definimos un vector a intervalos pequeños que representara las frecuencias en el eje x y luego definimos las funciones que se nos pide mediante la función plot graficamos los vectores mediante la función abs() sacamos el valor absoluto del vector y mediante el siguiente análisis determinamos la fase de las funciones:

Ambas funciones solamente tienen parte imaginaria por lo que es simple ver que la fase de un numero puramente complejo es $\frac{\pi}{2}$

Esto se deriva de la formula de euler que nos dice que :

$$e^{-i\theta} = Cos(\theta) - jSen(\theta)$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 - j \cdot 1$$

Por lo tanto $\theta = \frac{\pi}{2}$

Programa en Matlab:

Para el punto No 1 se obtiene el siguiente código:

```
function Trans_fourier()

clc;
clear all;

t = -50:.1:50.1;
tam_1=length(t)
tam_2=length(t)/2
for k=1:tam_2
    y(k)=(t(k)/50)+1;
end
for k=tam_2+1:(2*tam_2)
    y(k)=(-t(k)/50)+1;
end
F=abs(fft(y,tam_1));
%Reordenar X
Faux=F;
F(tam_2+1:tam_1)=Faux(1:tam_2);
F(1:tam_2)=Faux(tam_2+1:tam_1);
plot(t,F);
title('Transformada de Fourier');
disp('Fin del programa Transformada de Fourier')
```

Para la comparación de punto 1.1 se tiene el siguiente código:

```
function funciones_1_1()
clc;
clear all;
w=-2*pi:.0001:2*pi
F1=abs(((1-cos(50*w))*(2))./(50*(w.^2)));
```

```
plot(w,F1,'r');
```

Para el punto No 2 se tiene el siguiente código:

```
function convolucion()
clc;
clear all;
t=-2:.01:4;
x=zeros(size(t));
h=zeros(size(t));
tam_1=(3)/.01;
tam_2=(5)/.01;
for k=tam_1:tam_2
    x(k)=2;
end
tam_4=(1)/.01;
tam_5=(3)/.01;
tam_6=(5)/.01;
for k=tam_4:tam_5
    h(k)=1;
end
for k=tam_5:tam_6
    h(k)=-1;
end
subplot(1,3,1);
plot(t,x);
subplot(1,3,2)
plot(t,h,'r');

c=conv(x,h)/100;
u=length(c);
j=6/(length(c));
m=0:j:6-j;
subplot(1,3,3);
plot(m,c,'g');
```

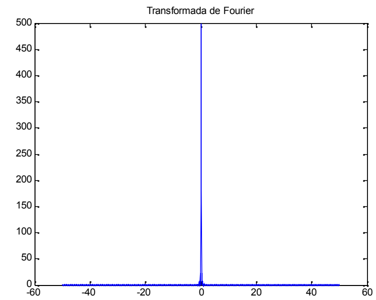
Para el punto No 3 tenemos el siguiente código:

```
function funciones()
clc;
clear all;
w=-2*pi:.001:2*pi
F1=((1-cos(50*w))*(2*i))./(50*(w));
F2=((sin(25*w).^2)./(25*w)).*(50*w*i);
subplot(1,2,1);
plot(w,F1,'r');
subplot(1,2,2);
plot(w,F2,'g');
input ('introduce una tecla para continuar')
F1=abs(((1-cos(50*w))*(2*i))./(50*(w)));
F2=abs(((sin(25*w).^2)./(25*w)).*(50*w*i));
subplot(1,2,1);
plot(w,F1,'r');
subplot(1,2,2);
plot(w,F2,'g');
input ('introduce una tecla para continuar')
x=ones(size(w))*(pi/2);
subplot(1,2,1);
plot(w,x,'r');
subplot(1,2,2);
```

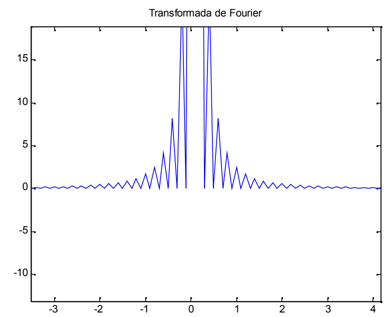
plot(w,x,'g');

RESULTADOS.

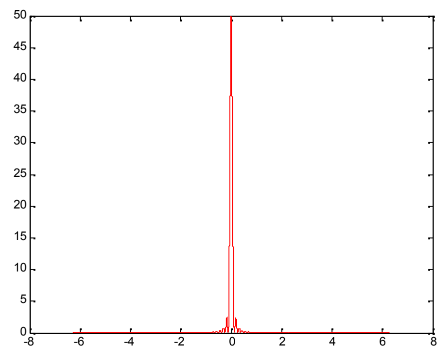
Para el punto No 1 tenemos las siguientes graficas



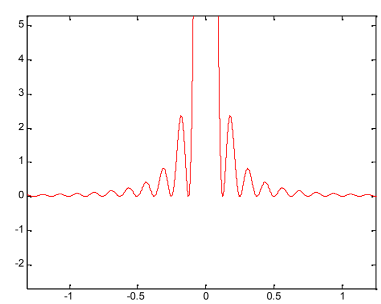
Haciendo Zoom:



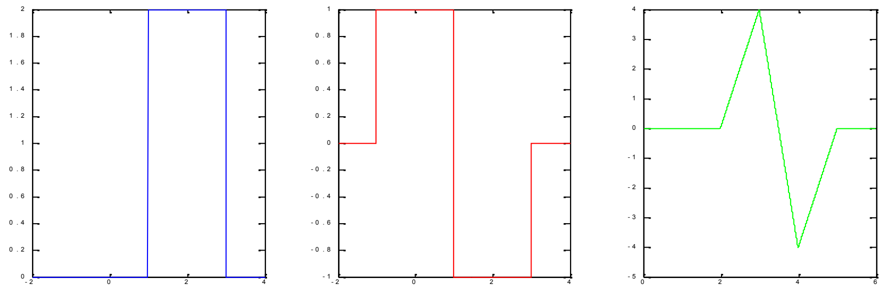
Para el punto No 1.1 tenemos:



Haciendo Zoom:

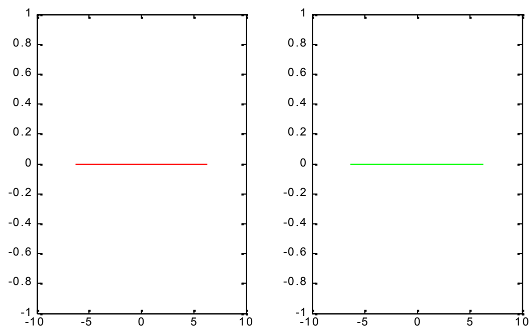


Para el punto No 2 tenemos las graficas de las funciones y en verde su convolusion:

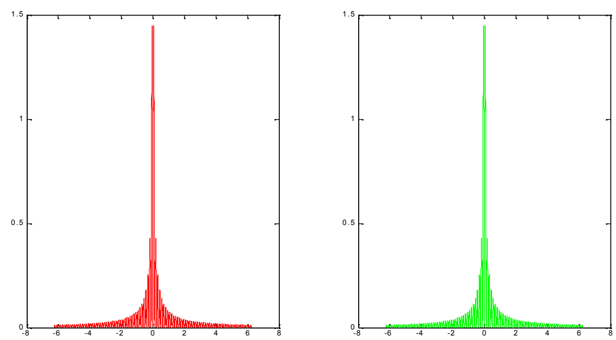


Para el No 3 tenemos lo que nos pide por incisos Siendo rojo la Funcion F_1 y verde la función F_2

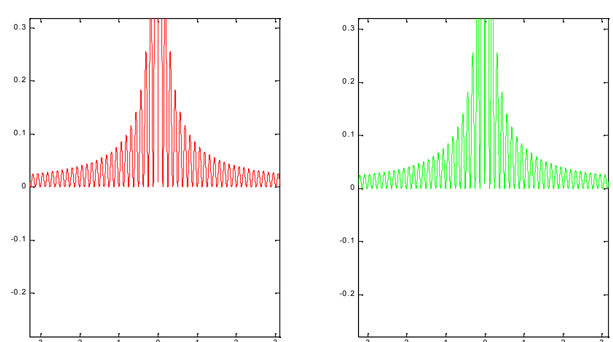
a)



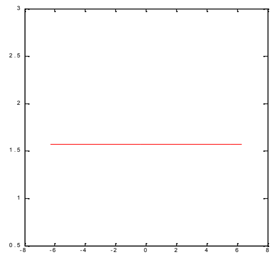
b)

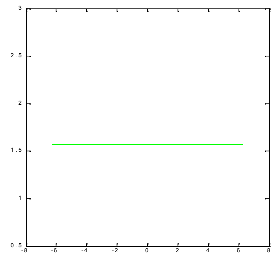


Haciendo zoom:



c)





CONCLUSIONES.

En esta practica lo que se encontró fue que matlab es una herramienta muy útil para calcular la transformada de Fourier de una función solo que al poder trabajar únicamente señales discretas la transformada que nos devolverá estará dada como el muestro de una señal a intervalos definidos, por lo cual al compararla con la función que se obtiene matemáticamente se observa que la segunda tiene una forma mas suave y bien definida, se pudo observar también que al graficar el espectro de frecuencias de la función triangular obtenemos una función muestra rectificada, que también aparece en el punto No 3 con una forma un poco distinta y también distintas frecuencias donde el valor del espectro se hace cero. Se identifico muy bien que la fase de un numero puramente complejo es $\pi/2$, también se encontró que la convolucion en Matlab mediante su comando conv(), tiene ciertas limitaciones ya que el vector devuelto de la convolucion de otros dos vectores se da en función del numero de elementos que conforman estos, siendo el tamaño del nuevo vector igual a la suma del tamaño de los vectores menos una casilla, por lo que para efectos prácticos se tiene que reacomodar el intervalo en el cual esta definida la función obtenida.
Una cosa muy importante que se observa es que el espectro de frecuencias para la función triangular es igual al espectro de frecuencias de la función cuadrada y en su trasformada solo varia que el del pulso cuadrado es complejo y la del pulso triangular es real por lo que se dice que una es derivada de la otra.

BIBLIOGRAFÍA

http://alojamientos.us.es/gtocoma/pid/pid4/pid43.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier

http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Euler

Análisis de Fourier
Hwei P. Hsu
Editorial Pearson Educación
1° Ed. 1973
México 1998