INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA EN
INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS

COMUNICACIONES I

PRACTICA No 1 "APROXIMACIÓN DE SEÑALES MEDIANTE SERIES DE FOURIER CON MATLAB"

By Richard

FECHA DE REALIZACIÓN: 13-FEB-08

FECHA DE ENTREGA: 20-FEB-08

FUNDAMENTO TEÓRICO.

Serie de Fourier

El análisis de Fourier es una herramienta matemática utilizada para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinitesimal de funciones senoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación del calor. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicando sus resultados iniciales en 1807 y 1811. Esta área de investigación se llama algunas veces Análisis armónico.

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo.

De acuerdo con los estudios de Fourier, es posible representar cualquier función f(t), periódica, a partir de una suma infinita de senos y cosenos, donde f(t) debe cumplir con las siguientes condiciones:

- f(t) solo puede tomar un solo valor en cada punto en el que es evaluada.
- la integral en un periodo de |f(t)| existe (no es infinita).
- f(t) tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
- f(t) tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.

La serie trigonométrica está definida por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

Las condiciones para que una función pueda ser desarrollada en series de Fourier y, por tanto, ser convergente, es que presente en el intervalo un número finito de máximos y mínimos o un número finito también de discontinuidades de una especie.

La serie Trigonometrica tiene la siguiente representación compacta:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

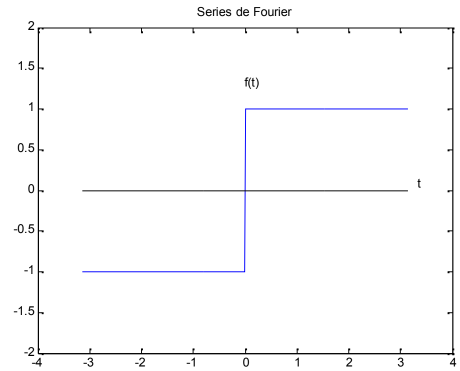
en donde:

$$c_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} \quad \text{y} \quad \varphi_n = -\tan^{-1}(b_n/a_n).$$

DESARROLLO

Procedimiento:

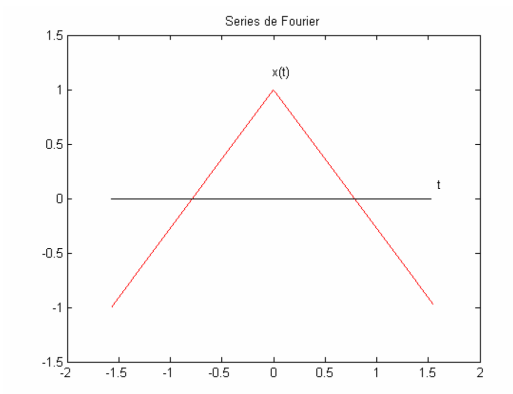
1.- Aproximar la señal f(t) (periódica)



a) Usando 5 términos.
b) Usando 15 términos.
c) Usando 50 términos.

1.1 Calcular el error generado en cada aproximación

2.- Aproximar x(t) periódica mediante una serie de Fourier.



a) Usando 5 términos.
b) Usando 50 términos.
c) Usando 40 términos.

2.1 Calcular el error en cada caso.

Análisis:

1.- Para empezar tenemos que la función f(t) esta definida como:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le \pi \\ -1 & \pi \le t\le 2\pi \end{cases}$$

Para aproximar la función f(t) lo hacemos mediante el sen(t), mediante una serie de la forma:

$$f(t)\approx C_1 Sen(t)+C_2 Sen(2t)+....+C_n Sen(nt)$$

Donde:

$$C_r=\frac{\int_a^b f(t)g_r(t)dt}{\int_a^b g_r{}^2(t)dt} \qquad \text{y} \qquad g_r=Sen(t)$$

Sustituyendo los valores en las formulas obtenemos:

$$C_r=\frac{\int_0^{\pi}1*Sen(rt)dt+\int_{\pi}^{2\pi}-1*Sen(rt)dt}{\int_0^{2\pi}Sen^2(t)dt}$$

$$C_r=\frac{-\frac{1}{r}Cos(rt)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{r}Cos(rt)\Big|_{\pi}^{2\pi}}{\frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi}dt-\int_0^{2\pi}Cos(2t)\right\}}=\frac{2}{r}\frac{1+1+1+1}{\left\{2\pi-\cancel{\frac{1}{2}Sen(2t)}\Big|_0^{2\pi}\right\}}$$

$$C_r=\begin{cases} 0 & Si\, r\, es\, par \\ \dfrac{4}{\pi r} & Si\, r\, es\, impar \end{cases}$$

Por lo tanto nos queda una serie como:

$$f(t)\approx\frac{4}{\pi}\left\{Sen(t)+\frac{1}{3}Sen(3t)+\frac{1}{5}sen(5t)+.....+\right\}$$

Lo cual representa una suma de senos donde el periodo y la amplitud van disminuyendo.

Por lo cual en el programa en Matlab solo tenemos que lograr esa suma para cada valor de un vector y multiplicarlo finalmente por la constante $\frac{4}{\pi}$.

El cálculo del error se da mediante la formula:

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a}\left\{ \int_a^b f^2(t)dt - C_1^2 K_1 - C_2^2 K_2 - C_3^2 K_3 - ... \right\}$$

Por lo que el error en este caso es:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\left\{ 2\pi - \frac{16}{\pi^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2} \right\}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}$$

2.- Para empezar tenemos que la función f(t) esta definida como:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4t}{T} + 1 & \frac{-T}{2} < t < \\ \frac{-4t}{T} + 1 & 0\ t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Dado que la función es simétrica al eje x se puede determinar a simple vista que el coeficiente a_0 es 0 ya que es el promedio.

Para el cálculo de los coeficientes a_n se tiene:

$$a_n = \frac{2}{T}\left\{ \int_{-T/2}^{T/2} f(t)Cos(n\omega_0 t) \right\} = \frac{2}{T}\left\{ \int_{-T/2}^{0} \frac{4t}{T}Cos(n\omega_0 t)dt + \int_0^{T/2} \frac{-4t}{T}Cos(n\omega_0 t)dt \right\}$$

Hacemos un cambio de variable con $t = -\tau$

$$a_n = \frac{2}{T}\left\{ \int_{T/2}^{0} \frac{-4\tau}{T}Cos(-n\omega_0 \tau)(-d\tau) + \int_0^{T/2} \frac{-4t}{T}Cos(n\omega_0 t)dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left\{ -\int_0^{T/2} \frac{-4\tau}{T}Cos(n\omega_0 \tau)(d\tau) - \int_0^{T/2} \frac{4t}{T}Cos(n\omega_0 t)dt \right\}$$

$$a_n = \frac{-16}{T^2}\left\{ \int_0^{T/2} \tau Cos(n\omega_0 \tau)d\tau \right\}$$

Aplicando $\int udv = uv + \int vdu$

$$dv = Cos(n\omega_0 t)dt \qquad\qquad u = t$$

$$v = \int Cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{(n\omega_0 t)} Sen(n\omega_0 t) \qquad du = dt$$

$$a_n = \frac{-16}{T^2}\left\{ \frac{t}{n\omega_0} Sen(n\omega_0 t)\Big|_0^{T/2} - \frac{1}{n\omega_0}\int_0^{T/2} Sen(n\omega_0 t)dt \right\}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{-16}{T^2}\left\{ \cancel{\frac{t}{n\omega_0} Sen(n\omega_0 t)\Big|_0^{T/2}} - \frac{1}{n\omega_0}\int_0^{T/2} Sen(n\omega_0 t)dt \right\}$$

$$a_n = \frac{-16}{T^2}\left\{ \frac{1}{(n\omega_0)^2} Cos\left(n\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}} \right) - \frac{1}{(n\omega_0)^2} Cos(0) \right\}$$

$$a_n = \frac{-16}{T^2}\left\{ \frac{1}{(n\omega_0)^2}\left((-1)^n - 1\right) \right\}$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^2\pi^2} \; Si\, n\, es\ par \\ 0\, Si\, n\, es\, impar \end{cases}$$

Para el cálculo de los coeficientes b_n tenemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\left\{ \cancel{\int_{-T/2}^{0} \frac{4T}{t} Sen(n\omega_0 t)dt} + \cancel{\int_0^{T/2} \frac{-4T}{t} Sen(n\omega_0 t)dt} \right\}$$

$$b_n = 0$$

Por lo tanto la serie nos queda de la siguiente Forma:

$$f(t) \approx \frac{8}{\pi^2}\left\{ \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9}Cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25}Cos(5\omega_0 t) + \ldots + \ldots \right\}$$

En este caso el error es calculado mediante:

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a}\left\{ \int_a^b f^2(t)dt - C_1^2 K_1 - C_2^2 K_2 - C_3^2 K_3 - \ldots \right\}$$

Quedando:

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{4t}{T} + 1 \right)^2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} * \left(Sen(.5T) * Cos(.5T) + \frac{T}{2} \right) \right\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left\{ \frac{7T}{3} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} * \left(Sen(.5T) * Cos(.5T) + \frac{T}{2} \right) \right\}$$

$$\varepsilon = \left\{ \frac{7}{3} - \frac{8}{T\pi^2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} * \left(Sen(.5T) * Cos(.5T) + \frac{T}{2} \right) \right\}$$

Programa en Matlab:

El script para el punto numero uno es el siguiente:

```
function fourier()
% f(x)= -1 si -pi<x<0
%        1 si 0<x<pi
clc;
clear all;
n=input('Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener\n   n=');
%Creamos un vector a intervalos pequeños
x = -pi:.001:pi;
y=zeros(size(x));
%Generamos la señal cuadrada mediante la funcion
%si x<0 vale -1
%si x>0 vale 1
f=-1*(x<0)+1*(x>0);
%Agregamos la constante e como el error que tiene un valor inicial de 1
e=1;
% sumas parciales de Fourier
%Generamos un vector del tamaño de x con ceros para que cada valor
%de x tenga uno en y
s = zeros(size(x));
%comenzamos el ciclo de sumas
for k=1:n
%para cada valor de s sumamos el valor del numero de terminos en cada
%casilla asi generando la aproximación de f(t)
s=s+(1/((2*k)-1))*sin(((2*k)-1)*x);
%sumamos el error para el numero de términos determinados
e=e-(8/(pi^2))*((1/((2*k)-1))^2);
end
%multilplicamos por la constante (4/pi) al vector s
s = (4/pi)*s;
% impresión de la gráfica
plot(x, s, 'r',x, f, 'b',x, y, 'black');
disp('El error es:')
disp(e)
title('Series de Fourier');
disp('Fin del programa Fourier')
```

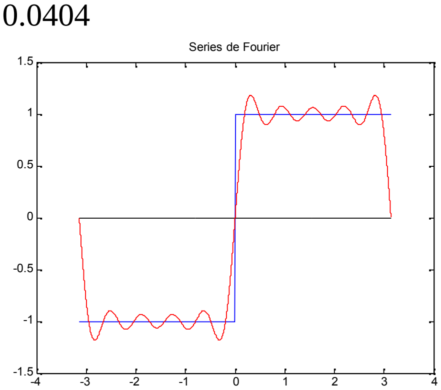
El programa para el punto numero dos es:

```
function fourier_t()
clc;
clear all;
n=input('Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener\n   n=');
T=input('Introduce el valor del periodo\n    T=');
x = -(T/2):.001:(T/2);
f=zeros(size(x));
y=zeros(size(x));
e=7/3;
s = zeros(size(x));
    for j=1:((T)/.001)
    if (x(j)<0)==1
        f(j)=((4/T)*x(j))+1;
    else
        f(j)=((-4/T)*x(j))+1;
    end
    end
for k=1:n
s=s+((1/((2*k)-1))^2)*cos(((2*k)-1)*x*(2*pi/T));
e=(8/(T*pi^2))*(1/((2*k-1)^2))*(sin(.5*(2*k-1))*cos(.5*(2*k-1))+(T/2));
end
s =s*(8/(pi^2));
% impresión de la gráfica
plot(x, s, 'r',x, f, 'b',x, y, 'black');
grid on;
title('Series de Fourier');
disp('El error es:');
disp(e);
disp('Fin del programa');
```

RESULTADOS.

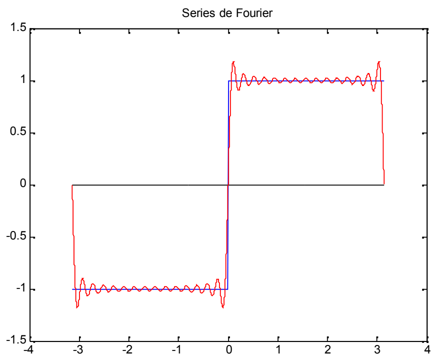
Para el punto número uno tenemos:

a) >> fourier()
Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
   n=5
El error es:
   0.0404



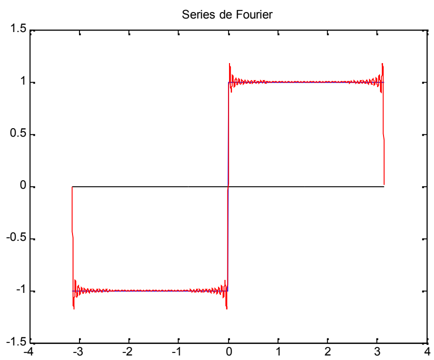
b) >> fourier()

Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
n=15
El error es:
0.0135



c) >> fourier()

Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
n=50
El error es:
0.0041

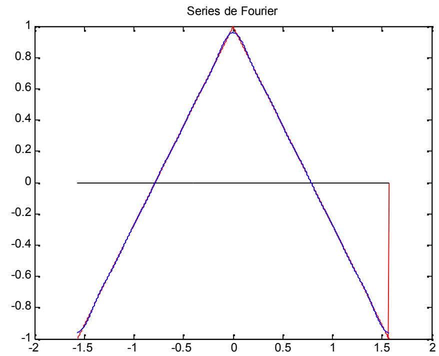


Para el punto número dos tenemos:

a) >> fourier_t()

Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
n=5
Introduce el valor del periodo
T=pi
El error es:
0.0057

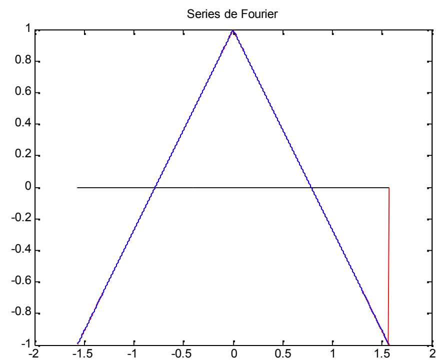
Fin del programa



b) >> fourier_t()

Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
n=20
Introduce el valor del periodo
T=pi
El error es:
3.4821e-004

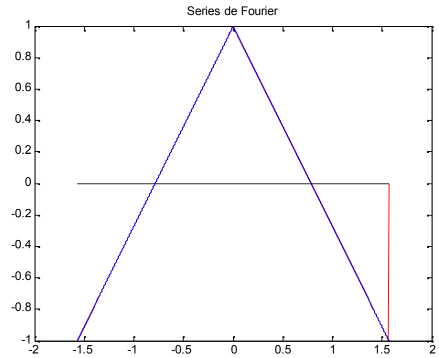
Fin del programa



c) >> fourier_t()

Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
n=50
Introduce el valor del periodo
T=pi
El error es:
2.8199e-005

Fin del programa



CONCLUSIONES.

Las series de Fourier son una gran herramienta matemática ya que con ella podemos aproximar una señal periódica de las que comúnmente se nos presenta en el estudio de Comunicaciones y muchas otros casos prácticos de ingeniería, en esta práctica encontramos que mediante la aplicación de algunas cuantas formulas para calcular los coeficientes de la serie de Fourier obtenemos una función que al ser graficada se observa que desde la primera aproximación ya se empieza asemejar a la función original y aunque la primera aproximación no es muy buena, notándose en la gráfica, a la vez que vamos aumentando el numero de términos se va aproximando en mayor medida y la grafica se ajusta mejor excepto en los puntos de discontinuidad. Además la practica sirvió para repasar el uso de Matlab ya que se deben tomar en cuenta sumas sucesivas y la impresión de puntos contenidos en vectores, también se observa muy bien gracias al programa las diferencias que se van generando entre la función original y sus aproximaciones y en los scripts generados la diferencia entre una serie y otra varia muy poco ya que en esencia siempre la serie de Fourier siempre nos llevara a hacer las sumas sucesivas con la diferencia entre los coeficientes y la función generadora entre una y otra de las funciones.

BIBLIOGRAFÍA

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería de Control y Robótica
Sistemas y señales
http://dctrl.fi-b.unam.mx/tutoriales/sistemas_y_seniales/conceptos.html

Wikypedia
http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier

Introducción a teoría y sistemas de comunicación
B. P. Lathi
Ed. Limusa
México DF 2001